LES PRINCIPALES MESURES D'INÉGALITÉ

Olivier Sautory

Avertissement

Ce papier constitue une version provisoire d'un document plus ambitieux, qui contiendra en particulier d'autres mesures d'inégalité (peut-être un peu plus "exotiques" que celles abordées dans ce papier...), des exemples d'utilisation des mesures présentées ici, les macros SAS mises à la disposition des statisticiens de l'INSEE pour les calculer, une bibliographie, une intoduction (et une conclusion) digne de ce nom, etc.

L'auteur tient à préciser que deux documents ont très largement constitué la "matière première" qui a permis d'élaborer ce papier, à savoir :

Gouriéroux C., 1981, "Mesures d'inégalité, de pauvreté, de concentration", cours polycopié, ENSAE.

Villeneuve A., 1984, "La mesure de l'inégalité par les indicateurs de concentration (présentation des indicateurs les plus connus et de divers problèmes et propriétés)", Note interne INSEE n°1380/450 du 7 juin 1984.

La présentation des mesures d'inégalité adoptée ici relève beaucoup plus de la "statistique descriptive" que de considérations de nature économique, voire philosophique, qui leur sont associées. La (future) bibliographie renverra les lecteurs intéressés par ces aspects aux textes qui les abordent explicitement (les deux documents mentionnés plus haut contiennent d'ailleurs certains développements sur ces sujets).

I. Courbe de Lorenz

On considère une population de n individus supposés numérotés par revenu croissant :

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots \leq x_n$$

où x_i désigne le revenu de l'individu i.

On note :

- $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ le revenu moyen dans la population

- $y_i = \frac{x_i}{m}$ le revenu "relatif" (i.e. rapporté à la moyenne) de l'individu i.

I.1 Définition

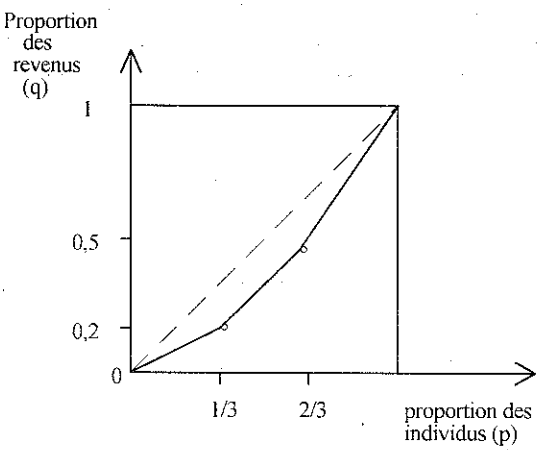
On note q_k la proportion du revenu total reçue par les k individus les plus pauvres :

$$q_k = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{x_1 + \ldots + x_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i \quad (1 \leq k \leq n)$$

(on pose $q_0 = 0$)

La courbe de Lorenz est la courbe reliant les points $\left(p_k = \frac{k}{n}, q_k\right)$, k = 0, 1 ...n

Exemple : n = 3 $x_1 = 2$ $x_2 = 3$ $x_3 = 5$



$p_1 = \frac{1}{3}$ $p_2 = \frac{2}{3}$ $p_3 = 1$

$q_1 = 0{,}2$ $q_2 = 0{,}5$ $q_3 = 1$

I.2 *Propriétés*

I.2.1 Forme de la courbe - Invariance

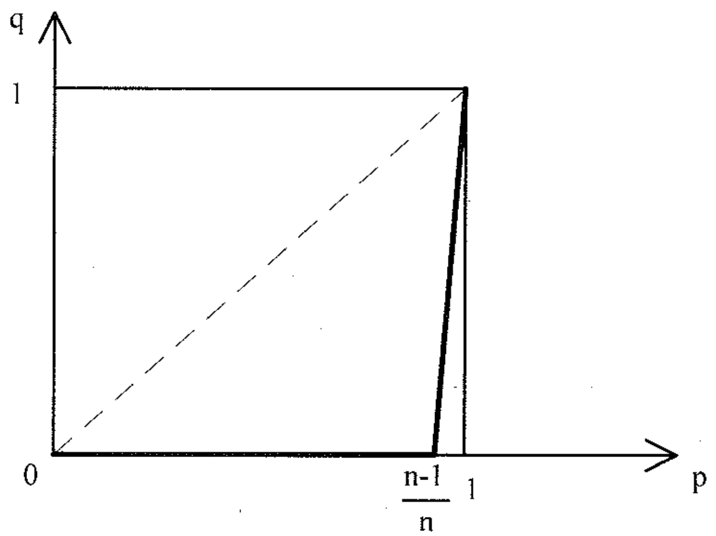
La courbe de Lorenz passe par les points (0,0) et (1,1), elle est linéaire par morceaux, inscrite dans le carré de côté 1, croissante (strictement si $x_1 > 0$, convexe (car $q_{k+1} - q_k \geq q_k - q_{k-1}$) donc située sous la première bissectrice.

La courbe de Lorenz est invariante par changement d'échelle (ou d'unité) sur les revenus. En revanche si tous les revenus sont augmentés d'une quantité positive, la courbe de Lorenz de la nouvelle distribution est située au-dessus de l'ancienne.

I.2.2 Cas limite

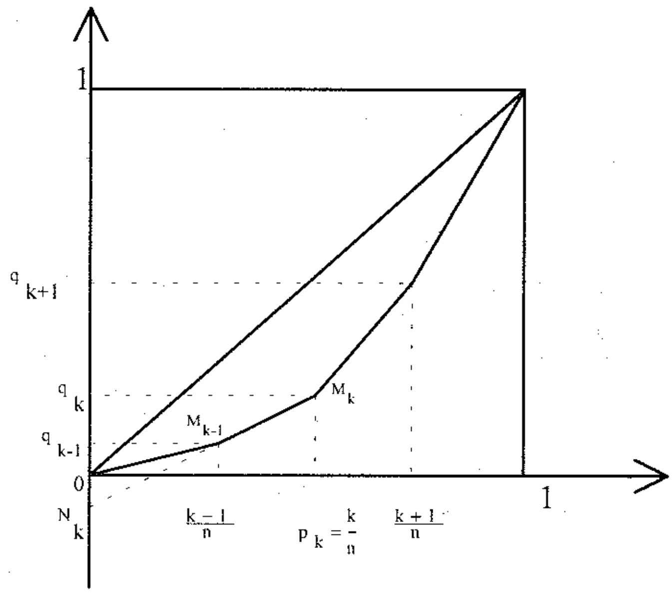
Dans une distribution égalitaire, tous les individus reçoivent le même revenu, et les p% les plus "pauvres" reçoivent p% du revenu total : la courbe de Lorenz est confondue avec la bissectrice. Une courbe proche de cette bissectrice correspond à une distribution presque égalitaire ; inversement, une distribution fortement inégalitaire est caractérisée par une courbe de Lorenz proche des côtés du carré.

L'inégalité est maximale si un seul individu a un revenu non nul, tous les autres ayant un revenu nul. La courbe de Lorenz correspondante à la forme suivante :



I.2.3 Propriétés géométriques

Dans tout ce paragraphe, on raisonne en termes de revenus **relatifs** y_i.



On note M_k le point courant (p_k, q_k) de la courbe de Lorenz.

• La pente de la droite OM_k vaut :

$$\frac{q_k}{p_k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} y_i$$

C'est le revenu moyen des k individus les plus pauvres.

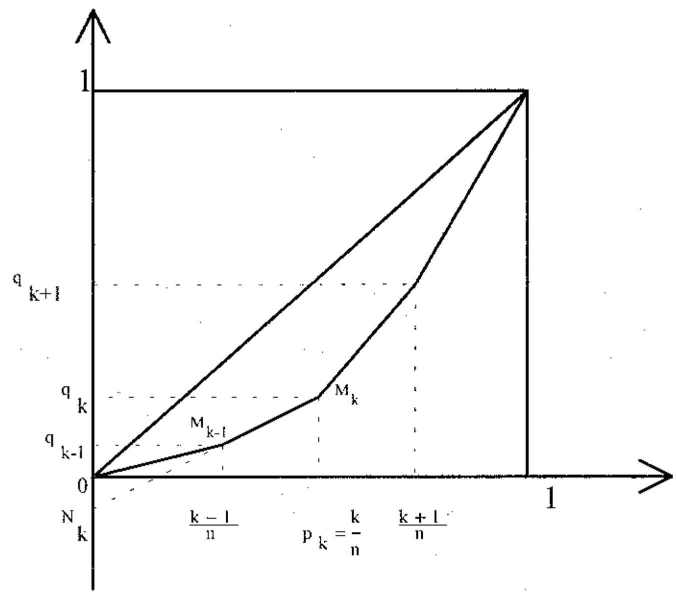
• La pente de la droite $M_{k-1}M_k$ vaut :

$$\frac{q_k - q_{k-1}}{p_k - p_{k-1}} = y_k$$

C'est le revenu du k-ième individu.

I.2.3 Propriétés géométriques

Dans tout ce paragraphe, on raisonne en termes de revenus **relatifs** y_i.



On note M_k le point courant (p_k, q_k) de la courbe de Lorenz.

• La pente de la droite OM_k vaut :

$$\frac{q_k}{p_k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} y_i$$

C'est le revenu moyen des k individus les plus pauvres.

• La pente de la droite $M_{k-1}M_k$ vaut :

$$\frac{q_k - q_{k-1}}{p_k - p_{k-1}} = y_k$$

C'est le revenu du k-ième individu.

• Soit N_k le point d'intersection de la droite $M_{k-1}M_k$, d'équation $Y - q_k = y_k\left(X - p_k\right)$ avec l'axe des ordonnées ; la longueur du segment ON_k vaut :

$$-q_k + p_k y_k = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i + \frac{k}{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(y_k - y_i)$$

C'est, au coefficient $\frac{1}{n}$ près, la quantité de revenus à verser aux k - 1 individus les plus pauvres pour leur assurer un revenu égal à celui du k-ième individu.

I.3 Données regroupées en classes

Il arrive fréquemment que l'on ne dispose que des données regroupées en H classes (et non pas des données individuelles) :

$$\left[e_0 = 0, e_1\right[\ldots\left[e_{h-1}, e_h\right[\ldots\left[e_{H-1}, e_H = +\infty\right[$$

Soit n_h le nombre d'individus ayant un revenu compris entre e_{h-1} et e_h, et X_h la somme des revenus de ces n_h individus. On construit alors la courbe de Lorenz pour les valeurs correspondant aux extrémités des classes :

$$p(e_h) = \frac{n_1 + \ldots + n_h}{n} \qquad q(e_h) = \frac{X_1 + \ldots + X_h}{nm} \qquad (h = 1\ldots H)$$

La fraction $p(e_h)$ de la population reçoit la fraction $q(e_h)$ du revenu total nm.

Pour tracer la courbe, on relie ces points entre eux par des segments de droite. La courbe de Lorenz a donc la même forme que celle obtenue au § I.1, et les propriétés sont identiques à celles énoncées au § I.2. Les propriétés vues au § I.2.3 deviennent ici, en notant M_h le point courant $\left(p(e_h), q(e_h)\right)$ de la courbe :

• la pente de la droite OM_h est le revenu (relatif) moyen des $n\ p(e_h)$ individus les plus pauvres ;

• la pente de la droite $M_{h-1}M_h$ est le revenu moyen des individus ayant un revenu compris entre e_{h-1} et e_h ;

• la longueur du segment ON_h est, au coefficient $\frac{1}{n}$ près, la quantité de revenus à verser aux $n\ p(e_{h-1})$ individus les plus pauvres pour leur assurer un revenu égal au revenu moyen des individus de la h-ième classe.

I.4 Généralisation à une variable continue

On peut construire la courbe de Lorenz pour toute variable numérique continue positive, de densité f (> 0) et de fonction de répartition F (inversible).

I.4.1 Définition

Une proportion d'individus p(x) = F(x) (avec x > 0) reçoit une proportion du revenu total égale à :

$$q(x) = \frac{\int_0^x u\, f(u)\, du}{\int_0^\infty u\, f(u)\, du} = \frac{1}{m} \int_0^x u\, f(u)\, du$$

où m est le revenu moyen dans la population.

La courbe de Lorenz est la courbe paramétrée : $\left(p = p(x),\ q = q(x)\right)\ \ (x > 0)$, soit

$$q = L(p) = \frac{1}{m} \int_0^{F^{-1}(p)} u\, f(u)\, du = \frac{1}{m} \int_0^p F^{-1}(u)\, du$$

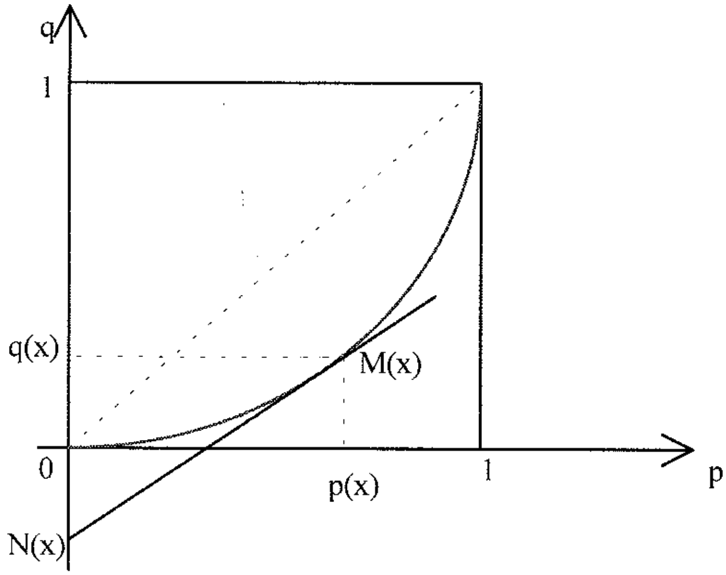
I.4.2 Propriétés

On peut retrouver à l'aide de l'expression précédente les propriétés vues au § I.2 :

• $L(0) = 0,\ L(1) = 1$

• Croissance : $L'(p) = \frac{1}{m} F^{-1}(p) > 0$

• Convexité : $L''(p) = \frac{1}{f\left[F^{-1}(p)\right]} > 0$



• pente de $OM(x) = \dfrac{q(x)}{F(x)} =$ revenu (relatif) moyen des individus ayant un revenu inférieur ou égal à x.

• pente de la tangente à la courbe en $M(x)$:

$$\frac{1}{m} F^{-1}(p) = \frac{x}{m} = \text{ revenu (relatif) en ce point.}$$

• longueur du segment $ON(x) = x\ p(x) - q(x) =$ quantité du revenu à accorder aux plus pauvres (de revenu < x) pour leur assurer un revenu égal à x.

I.4.3 Exemple

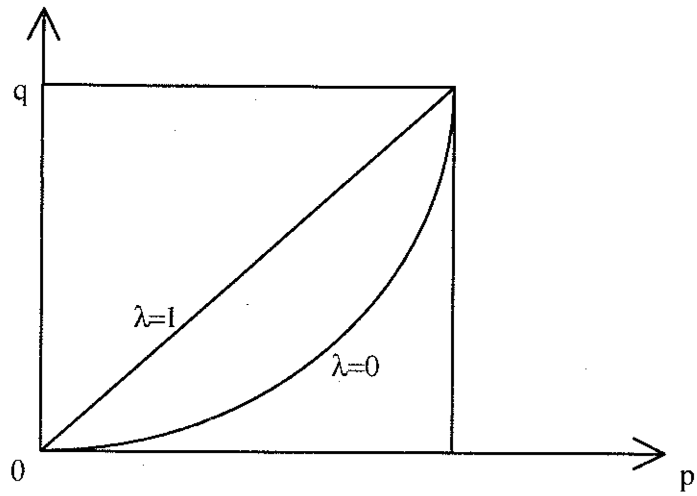
On suppose que la variable revenu suit une loi uniforme sur [a, b] (0 < a < b).

On a alors, pour x ∈ [a, b] :

$$p(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad q(x) = \frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

d'où :

$$q = \frac{(1-\lambda)p^2 + 2\lambda p}{1+\lambda}, \text{ avec } \lambda = \frac{a}{b} \in]0,1[$$



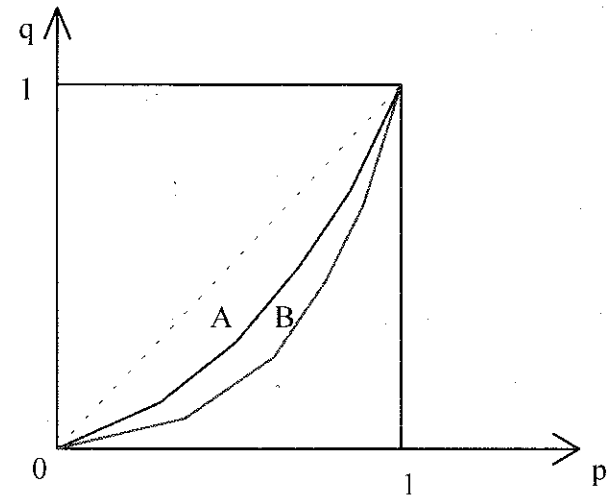
Le paramètre λ s'interprète comme une mesure d'inégalité : plus il est élevé, plus la distribution est égalitaire.

Le cas $\lambda = 1$ $(i.e. \, b \to a)$ correspond à la première bissectrice : tous les revenus sont égaux ; le cas $\lambda = 0$ $(i.e. \, b \to +\infty)$ correspond à la partie de la parabole $q = p^2$: l'inégalité est maximale.

Remarque : relier les points successifs par des segments de droite dans le cas de données regroupées en classes ne revient donc pas à supposer une répartition uniforme des revenus dans chaque classe.

I.5 Comparaison des courbes de Lorenz

Soient deux distributions de revenus A et B, pas nécessairement relatives à une même population, telles que la courbe de Lorenz soit toujours en-dessous de celle de A (avec éventuellement des points communs).



Cela signifie que les p% individus les plus pauvres de A sont, quel que soit p, moins pauvres que ceux de B (i.e. leur revenu moyen est plus élevé dans la distribution A que dans la distribution B). On dira dans ce cas que **la distribution B est plus inégalitaire que la distribution A**.

Si on considère maintenant que ces distributions sont relatives à une même population, et correspondent à deux partages d'un même revenu total (ce que l'on peut supposer, car une courbe de Lorenz ne dépend pas du nombre n de revenus, et est invariante par homothétie), on a la propriété suivante : la distribution B est plus inégalitaire que A si et seulement si A peut être obtenue à partie de B par une suite de "transferts" de riches vers les pauvres, un transfert étant défini de la façon suivante :

un transfert égal à h (> 0) du riche j vers le pauvre i (< j) est tel que le revenu de j devient $x_j - h$ et le revenu de i devient $x_i + h$ (avec $h < x_j - x_i$), les autres revenus restant inchangés.

II. Mesures scalaires d'inégalités

La relation d'inégalité fondée sur la comparaison des courbes de Lorenz est une relation d'ordre partiel sur les distributions : on ne peut comparer deux distributions pour lesquelles les courbes de Lorenz correspondantes ont un point d'intersection. Il est donc nécessaire, pour comparer deux distributions quelconques, de définir une mesure scalaire d'inégalité I :

$$distribution\ x = (x_1, \ldots, x_n) \rightarrow I(x) \in IR$$

On dira qu'une distribution x est plus inégalitaire (au sens de la mesure I) qu'une distribution z si I(x)>I(z).

II.1 Condition de Pigou-Dalton (Lorenz)

On cherchera (généralement) des mesures d'inégalité I telles que le préordre total associé à I soit compatible avec le préordre partiel déduit de la comparaison des courbes de Lorenz, i.e. des mesures I vérifiant les conditions suivantes (qui sont équivalentes) :

- "de Lorenz" : si x est plus inégalitaire que z (au sens défini au § 1.5), alors I (x) > I (z);

- "de Pigou-Dalton" : un transfert d'un riche vers un pauvre entraîne une diminution de I (si l'écart entre les deux revenus considérés a diminué).

Remarque : on peut définir une condition de Pigou-Dalton-Lorenz au sens large :

- x plus inégalitaire que z $\Rightarrow$ I (x) $\geq$ I (z) ;

- un transfert d'un riche vers un pauvre ne peut s'accompagner d'une augmentation de I.

Transfert

Lorsque l'on parlera de transfert par la suite, il s'agira toujours de revenus **relatifs** :

$$y_j \rightarrow y_j^* = y_j - h$$
$$y_i \rightarrow y_i^* = y_i + h$$

avec $y_i < y_j$ et $h < y_j - y_i$.

On peut noter qu'à l'issue du transfert l'individu j peut se retrouver plus pauvre que l'individu i ($si\ h > \frac{1}{2}(y_j - y_i)$), mais l'écart entre leurs revenus est moins grand : $\left|y_j^* - y_i^*\right| < y_j - y_i$.

Pour étudier les conséquences d'un transfert sur les différentes mesures d'inégalité que l'on va présenter, il sera parfois commode de supposer le transfert "infinitésimal". La variation d'une mesure I s'écrira alors :

$$dI = I\left(y_1 \ldots (y_i + h) \ldots (y_j - h) \ldots y_n\right) - I\left(y_1 \ldots y_i \ldots y_j \ldots y_n\right) = h\left(\frac{\partial I}{\partial y_i}\left(y_1 \ldots y_n\right) - \frac{\partial I}{\partial y_j}\left(y_1 \ldots y_n\right)\right)$$

II.2 Condition suffisante

La condition de Pigou-Dalton-Lorenz est vérifiée si I est de la forme :

$$I = -\sum_{k=1}^{n} u\left(\frac{x_k}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{n} u(y_k)$$

où u est une fonction strictement concave.

On a alors en effet : $dI = -h\left(u'(y_i) - u'(y_j)\right) < 0$

puisque u' est décroissante.

Interprétation économique

- u s'interprète comme une fonction d'utilité individuelle, dépendant uniquement du revenu, la même pour tous les individus.

- $W(x_1 \ldots x_n) = \sum_{k=1}^{n} u(y_k)$ s'interprète comme une fonction d'utilité collective, dépendant uniquement des niveaux d'utilité de chaque individu, ayant comme propriétés d'être :

  - croissante dans les utilités individuelles ;

  - symétrique (exigence d'anonymat) ;

  - quasi-concave (aversion pour l'inégalité).

I = - W peut dont s'interpréter comme une mesure d'inégalité.

III. Indice de Gini

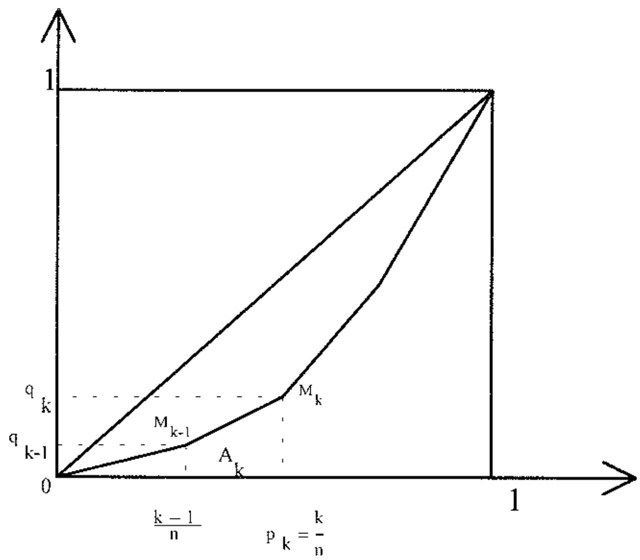
III.1 Définition

L'indice de Gini est égal au double de l'aire comprise entre la courbe de Lorenz et la bissectrice.

Cette mesure d'inégalité, la plus utilisée, a été introduite par le statisticien italien Corrado Gini.

III.2 Expressions de l'indice de Gini

III.2.1. Données individuelles



L'aire A_k vaut :

$$A_k = (q_k - q_{k-1}) \times \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{k}{n}\right) + \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2n^2} y_k (2n - 2k + 1)$$

On en déduit la valeur de l'indice de Gini :

$$G = 2\times\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} y_k\,(2n-2k+1) \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} y_k\,(2n-2k+1)$$

$$\boxed{G = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} y_k\,(2k-n-1)} \qquad (2)$$

En utilisant la relation :

$$\sum_{k}\sum_{k'} min\left(y_k,\, y_{k'}\right) = \sum_{k} y_k + 2\sum_{k}\ \sum_{k'>k} min\left(y_k,\, y_{k'}\right) = \sum_{k} y_k + 2\sum_{k}(n-k)\,y_k$$

on peut déduire de (1) :

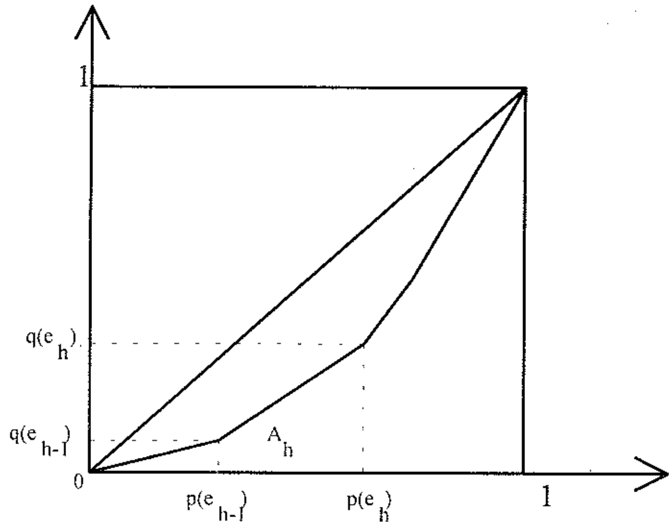
$$\boxed{G = 1 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{k'=1}^{n} min\left(y_k, y_{k'}\right)} \qquad (3)$$

Si on utilise la relation $y_k + y_{k'} = 2\,min\,(y_k, y_{k'}) + \left|y_k - y_{k'}\right|$, on obtient aussi :

$$\boxed{G = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{k'=1}^{n}\left|y_k - y_{k'}\right|} \qquad (4)$$

III.2.2. Données regroupées en classes

On conserve les mêmes notations que dans le § I.3.



L'aire A_h vaut : $\left[q(e_h)-q(e_{h-1})\right]\left[1-\frac{p(e_{h-1})+p(e_h)}{2}\right]$

On en déduit la valeur de $G = 2\left(\frac{1}{2}-\sum_h A_h\right)$:

$$\boxed{G=\sum_{h=1}^{H}\left[q(e_h)-q(e_{h-1})\right]\left[p(e_h)+p(e_{h-1})\right]-1}$$

On obtient aussi, de façon analogue :

$$\boxed{G=1-\sum_{h=1}^{H}\left[p(e_h)-p(e_{h-1})\right]\left[q(e_h)+q(e_{h-1})\right]}$$

Comme on l'a vu au § I.4.3, l'indice G ainsi calculé est un minorant de l'indice G_0 que l'on obtiendrait si l'on connaissait les revenus individuels. On peut obtenir un majorant de G_0 en utilisant la propriété de convexité de la courbe de Lorenz.

III.2.3. Cas d'une variable continue

On conserve les mêmes notations que dans le § I.4.

L'aire comprise entre la première bissectrice et la courbe de Lorenz q = L (p) vaut :

$$\int_0^1 \left[p-L(p)\right]dp.$$

On en déduit la valeur de l'indice de Gini :

$$\boxed{G = 2\int_0^1 [p - L(p)dp] = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp}$$

On peut aussi écrire :

$$G = 1 - \frac{2}{m}\int_0^1 \left(\int_0^p F^{-1}(u)\, du\right) dp = 1 - \frac{2}{m}\int_0^1 (1-u)\, F^{-1}(u)\, du$$

soit, en utilisant la relation $\int_0^1 F^{-1}(u)\, du = m$:

$$\boxed{G = -1 + \frac{2}{m}\int_0^1 u\, F^{-1}(u)\, du = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{\infty} v\, F(v)\, f(v)\, dv}$$

On peut aussi obtenir une formule équivalente à l'expression (4) du § III.2.1 :

$$\boxed{G = \frac{1}{2m}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |u - v|\, f(u)\, f(v)\, du\, dv}$$

Exemple

Si la variable revenu suit une loi uniforme sur [a, b], 0 < a < b :

$$G = 1 - 2\int_0^1 \frac{(1-\lambda)p^2 + 2\lambda p}{1+\lambda} dp = \frac{1}{3}\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \quad avec\ \lambda = \frac{a}{b}$$

III.3 Valeurs minimale et maximale

- G est minimal, et vaut alors 0, si la courbe de Lorenz coïncide avec la première bissectrice, i.e. dans le cas d'une distribution parfaitement égalitaire.

- G est maximal si tous les y_i sont nuls sauf un : $y_1 = \ldots = y_{n-1} = 0 \qquad y_n = n$

$$G_{max} = \frac{n-1}{n}$$

III.4 Interprétations

1. Par sa définition même, G s'interprète comme une certaine "distance" à la situation d'égalité.

2. D'après la formule (4) du § III.2.1, G est la demi-moyenne des écarts absolus entre les y_i pris 2 à 2 : c'est donc un indicateur de dispersion.

3. On peut réécrire la formule (2) du § III.2.1 sous la forme suivante :

$$G=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-1\right)\left(\frac{k}{n}-\frac{n+1}{2n}\right)$$

G/2 est égal à la covariance entre le niveau relatif des revenus (variable y_k) et le rang relatif dans l'échelle des revenus (variable k/n).

4. L'indice de Gini peut également s'interpréter en termes de perceptions individuelles du phénomène de l'inégalité (cf. § II).

   - La formule (4) du § III.2.1 s'écrit :

$$G=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_1(y_k) \qquad avec\ u_1(y_k)=-\frac{1}{2n}\sum_{k'=1}^{n}\left|y_k-y_{k'}\right|$$

L'utilité de l'individu k est mesurée par les écarts entre son revenu et ceux des autres individus.

   - Cette formule peut se réécrire :

$$G=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k'<k}\left(y_k-y_{k'}\right)\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left((k-1)y_k-\sum_{k'<k}y_{k'}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\left(y_k-\frac{1}{k-1}\sum_{k'<k}y_{k'}\right)=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_2(y_k)$$

avec $u_2\left(y_k\right)=-\frac{k-1}{n}\left(y_k-\overline{y}_{inf}(k)\right)$,

où $\overline{y}_{inf}(k)$ est la moyenne des revenus inférieurs à y_k.

L'utilité de l'individu k est le produit de la proportion d'individus plus pauvres que lui par l'écart entre son propre revenu et leur revenu moyen.

- On peut aussi écrire, de façon analogue :

$$G = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{n}\left(\frac{1}{n-k}\sum_{k'>k}\left(y_{k'}-y_k\right)\right) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_3(y_k)$$

avec $u_3(y_k) = -\frac{n-k}{n}(\overline{y}_{sup}(k) - y_k)$,

où $\overline{y}_{sup}(k)$ est la moyenne des revenus supérieurs à y_k

L'utilité de l'individu k est le produit de la proportion d'individus plus riches que lui par l'écart entre leur revenu moyen et son propre revenu.

III.5 Conséquence d'un transfert

En utilisant la formule (2) du § III.2.1, il est facile de vérifier que la variation de l'indice de Gini consécutive à un transfert vaut, en supposant h assez petit pour ne pas affecter les rangs du " riche" et du "pauvre" :

$$\Delta G = -\frac{2}{n^2}(j-i)h$$

Comme attendu d'après sa définition même, l'indice de Gini vérifie la condition de Pigou-Dalton-Lorenz ; la variation ΔG dépend des rangs des individus, et non de leurs revenus. Cet indice accorde donc le même poids à l'inégalité parmi les riches ou parmi les pauvres.

IV. Autres mesures d'inégalité

IV.1 Écart relatif moyen

IV.1.1 Définition

Cette mesure est la moyenne arithmétique des valeurs absolues des écarts des revenus (relatifs) à la moyenne :

$$\boxed{D = \frac{1}{n\overline{x}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \overline{x}| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |y_k - 1|}$$

Dans le cas d'une variable continue, D a pour expression :

$$D = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} |u - m| \, f(u) \, du$$

Remarque : on rencontre dans la littérature **l'indicateur de Kuznets**, noté K, qui n'est en fait rien d'autre que D/2.

Valeurs minimale et maximale

- $D_{min} = 0$: tous les revenus sont égaux
- $D_{max} = \dfrac{n-1}{n}$: tous les revenus sont nuls, sauf un.

IV.1.2 Interprétations

1. D est le *pourcentage d'égalisation maximale*, i.e. la proportion (minimale) de la masse totale des revenus $(n\overline{x})$ qu'il faudrait redistribuer entre les individus pour atteindre l'égalité complète (par les transferts $|x_k - \overline{x}|$).

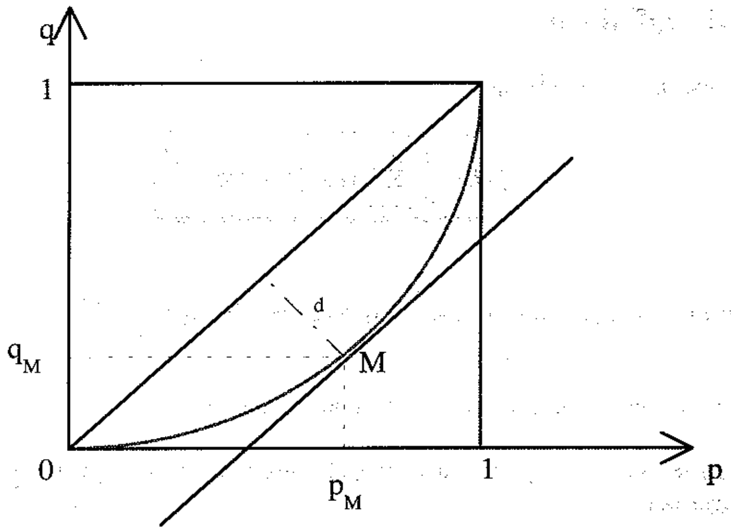
2. K (=D/2) est égal à la différence entre la proportion de la masse totale des revenus détenue par les individus "riches" (i.e. de revenu supérieur à la moyenne) et la proportion de ces individus "riches" dans la population. K est aussi égal à la différence entre la proportion d'individus "pauvres" (i.e. de revenu inférieur à la moyenne) et la proportion de la masse totale des revenus détenue par ces individus.

$$K = \frac{n_r \overline{x}_r}{n\overline{x}} - \frac{n_r}{n} = \frac{n_p}{n} - \frac{n_p \overline{x}_p}{n\overline{x}}$$

où n_r et n_p désignent les nombres de riches et de pauvres, $\overline{x}_r$ *et* $\overline{x}_p$ les revenus moyens des riches et des pauvres (voir démonstration en annexe).

3. D est la "distance" (à une constante multiplicative près) entre la courbe de Lorenz de la distribution et la première bissectrice.

$$D = 2\sqrt{2}d$$



M est le point de la courbe de Lorenz où la tangente est parallèle à la bissectrice : c'est le point où la distance à cette bissectrice est maximale (en raison de la convexité de la courbe).
(voir démonstration en annexe).

IV.1.3 Conséquence d'un transfert

D'après la définition de D, et en utilisant l'interprétation 2 du § IV.1.2, il est facile de vérifier que la variation de l'écart relatif consécutive à un transfert vaut :

$\Delta D = -\frac{2h}{n}$ $\quad si\ y_i < 1 < y_j$ i.e. si l'individu j a un revenu supérieur à la moyenne et l'individu i a un revenu inférieur à la moyenne

$= 0$ sinon, i.e. si les individus i et j sont tous les deux "riches" ou tous les deux "pauvres".

La condition de Pigou-Dalton-Lorenz n'est donc vérifiée qu'au sens large.

L'interprétation 3 du § IV.1.2 permet d'illustrer le fait que la condition de Lorenz n'est vérifiée qu'au sens large : deux distributions peuvent avoir des courbes de Lorenz ayant comme point commun le point M défini ci-dessus, l'une étant néanmoins toujours située sous l'autre. L'une des deux distributions est donc plus inégalitaire que l'autre, bien qu'elles conduisent à la même valeur de D.

IV.2 Variance des logarithmes

IV.2.1 Définition

Cette mesure est définie par :

$$\boxed{VL = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(Log\frac{x_k}{\bar{x}} - Log\, g\right)^2}$$

où g est la moyenne géométrique des revenus relatifs $y_k\ (= x_k/\bar{x})$: $g = \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{n}}$

VL est donc la variance des logarithmes des revenus relatifs.

Remarque : on trouve parfois dans la littérature une formule erronée de la variance des logarithmes :

$$VL' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(Log\frac{x_k}{\bar{x}}\right)^2$$

Dans cette formule, la moyenne des logarithmes des revenus (Log g) est remplacée par le logarithme du revenu moyen (qui vaut 0).

Valeurs minimales et maximales

- **$VL_{min} = 0$: tous les revenus sont égaux.**
- **VL → + ∞ dès qu'un revenu x_k est nul.**

Cette propriété rend l'indicateur inutilisable lorsqu'il y a des revenus nuls (en particulier dans le cas où ces revenus nuls sont assez fréquents dans la population, par exemple, pour les revenus fonciers, immobiliers ...). Même si le calcul ne se fait pas au niveau individuel (mais décile par décile par exemple), l'indicateur VL sera sensible aux très petites valeurs (voir aussi plus loin), qui ne sont d'ailleurs pas en général les plus fiables.

IV.2.2 Conséquence d'un transfert

La variation de VL consécutive à un transfert infinitésimal h d'un riche j vers un pauvre i vaut :

$$d\,VL = -\frac{2h}{n}\left(\frac{Log\left(y_j/g\right)}{y_j} - \frac{Log\left(y_i/g\right)}{y_i}\right)$$

On a donc :

$d\,VL < 0$ si $y_i < y_j \le eg$

$d\,VL > 0$ si $y_j > y_i \ge eg$

où $e \approx 2{,}7$

(voir démonstration en annexe).

VL ne vérifie donc pas la condition de Pigou-Dalton-Lorenz ; le résultat est même aberrant si le transfert s'effectue entre deux individus dont les revenus sont supérieurs à 2,7 fois le revenu moyen (car $g \approx 1$).

Remarques

- Il est facile de vérifier que $f''(y) < 0 \text{ si } y < eg$: à différence de revenus $y_j - y_i$ constante $\left(avec\ y_i < y_j < eg\right)$, la diminution de VL est d'autant plus forte que les revenus sont faibles. Cet indicateur accorde donc un poids plus important à l'inégalité parmi les pauvres.

- La condition de Pigou-Dalton-Lorenz n'est pas vérifiée non plus si l'on utilise la "fausse" variance des logarithmes VL' (remplacer g par 1 dans les formules précédentes).

Conclusion

La variance des logarithmes n'est pas un bon indicateur. Il est néanmoins couramment utilisé, pour des raisons :

• ***historiques*** : son emploi a été proposé il y a longtemps, avec l'idée que s'intéresser aux logarithmes des revenus, et à leur dispersion mesurée par la variance, c'est étudier les différences **relatives** de revenus ;

• ***théoriques*** : il est "classique" d'admettre qu'une distribution de revenus suive un loi log-normale, pour laquelle la variance des logarithmes est un indicateur de dispersion tout à fait adéquat.

IV.3 Indicateurs d'Atkinson

IV.3.1 Définition

L'indicateur d'Atkinson A(a), avec a < 1, est défini par :

$$\boxed{A(a) = 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (y_k)^a \right)^{\frac{1}{a}} = 1 - m_a}$$

où m_a est la *moyenne d'ordre a* de la distribution des y_k.

Cas particuliers

• a = - 1

A (-1) = 1 - H, où H est la moyenne harmonique des y_k.

• a = 0

La formule donnée est indéterminée, mais par continuité m_a tend vers la moyenne géométrique G des y_k ; on posera donc :

$$\boxed{A(0) = 1 - G}$$

Cet indicateur est aussi appelé **indicateur de Champernowne**.

On a : $-Log\left[1 - A(0)\right] = -Log\, G = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Log\, y_k$.

On rencontre cet indicateur dans la littérature sous le nom de déviation logarithmique moyenne, ou **écart moyen des logarithmes.**

Valeurs minimale et maximale

- $A(a)_{min} = 0$: tous les revenus sont égaux.

$$\left(car\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k\right)^a < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = 1, \text{ sauf si } y_k = 1\ \forall k \right)$$

- Pour la valeur maximale de A(a), il faut distinguer 2 cas :

1er cas : $a \leq 0$

$A(a) \to 1$ dès qu'un revenu x_k est nul.

Ce résultat disqualifie donc cet indicateur pour certains types de revenus, comme c'était le cas pour la variance des logarithmes.

2ème cas : $a > 0$

La valeur maximale de A(a), obtenue lorsque tous les revenus sont nuls sauf un, vaut :

$$A(a)_{max} = 1 - n^{\frac{a-1}{a}}$$

(voir démonstration en annexe)

IV.3.2 Conséquence d'un transfert

La variation de A(a) consécutive à un transfert infinitésimal h d'un riche j vers un pauvre i vaut :

$$dA(a) = \frac{(1-A)^{1-a} h}{n}\left(\left(y_j\right)^{a-1} - \left(y_i\right)^{a-1}\right) < 0$$

(voir démonstration en annexe).

Cette formule est valable aussi lorsque a=0. La condition de Pigou-Dalton-Lorenz est vérifiée pour tout indicateur d'Atkinson A(a) (a < 1), puisque $(y_j)^{a-1} - (y_i)^{a-1} < 0$.

Remarques

A différence de revenus $y_j - y_i$ constante, $|dA(a)|$ est d'autant plus élevée que les revenus sont faibles car $y \to -y^{a-1}$ est une fonction concave : A(a) accorde un poids plus important à l'inégalité parmi les pauvres.

- On peut retrouver les résultats précédents en notant que :

 * si a>0, A(a) varie comme $-[1-A(a)]^a$, qui est de la forme $-\sum_{k=1}^{n} u(y_k)\ \ avec\ u(y) = \frac{1}{n} y^a$, et donc $u''(y) < 0$;

 * si a<0, A(a) varie comme $[1-A(a)]^a$, qui est de la forme $-\sum_{k=1}^{n} u(y_k)\ \ avec\ u(y) = -\frac{1}{n} y^a$, et donc $u''(y) < 0$.

IV.4 Indice de Theil

IV.4.1 Entropie d'une distribution de revenus

De façon générale, l'**entropie d'une distribution de probabilités** $(p_1 \dots p_k \dots p_n)$ sur un ensemble fini à n éléments (donc vérifiant $p_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$) est définie par :

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k \, Log\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

avec la convention 0 log $\left(\frac{1}{0}\right) = 0$

Cette notion d'entropie est dérivée de la théorie de l'information.

L'entropie est maximale, et vaut Log n, si toutes les probabilités sont égales (voir démonstration en annexe).

L'entropie est minimale, et vaut 0, si toutes les probabilités sont nulles sauf une : $\exists i \;\; p_i = 1$

(en effet, dès que $\exists$ k tel que $0 < p_k < 1$, *alors* $H > 0$).

Par analogie, l'**entropie d'une distribution de revenus** $(x_1 \ldots x_k \ldots x_n)$ est définie par :

$$H = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n\bar{x}} Log\left(\frac{n\bar{x}}{x_k}\right)$$

IV.4.2 Définition de l'indice de Theil

L'indice de Theil est égal à la variation d'entropie entre la situation parfaitement égalitaire (revenus tous égaux) et la situation réelle.

$$T = H_{max} - H = Log\, n - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n\bar{x}} Log\left(\frac{n\bar{x}}{x_k}\right)$$

soit :

$$\boxed{T = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n\bar{x}} Log\left(\frac{x_k}{\bar{x}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k\, Log\, y_k}$$

(avec la convention $y_k \; Log\; y_k = 0 \;\; si \;\; y_k = 0$).

Remarque

$$T = \lim_{a \to 1} \frac{1 - [1 - A(a)]^a}{1 - a}$$

où A(a) est l'indicateur d'Atkinson (§ IV.3) (voir démonstration en annexe).

Valeurs minimale et maximale

D'après le paragraphe précédent :

- $T_{min} = 0$: situation égalitaire
- $T_{max} = Log\ n$: tous les revenus sont nuls sauf un.

IV.4.3 Conséquence d'un transfert

L'indice de Theil est de la forme $-\sum_k u(y_k)$, avec $u(y) = -\frac{1}{n} y \, Log\, y$

$u''(y) = -\frac{1}{ny} < 0$: la condition de Pigou-Dalton-Lorenz est vérifiée.

La variation de T consécutive à un transfert infinitésimal h d'un riche j vers un pauvre i vaut :

$$dT = \frac{h}{n}(Log\, y_i - Log\, y_j)$$

Remarque : $u''(y)$ est croissante, donc T accorde plus d'importance à l'inégalité parmi les pauvres qu'à l'inégalité parmi les riches.

IV.5 Coefficient de variation

IV.5.1 Définition

Le coefficient de variation est le rapport de l'écart-type de la distribution des x_k à sa moyenne $\overline{x}$, ou encore l'écart-type de la distribution des y_k :

$$\boxed{CV = \frac{1}{\overline{x}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 \right)^{½} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (y_k - 1)^2 \right)^{½}}$$

Autres expressions

$$CV = \left(\frac{1}{n} \sum_k (y_k)^2 - 1 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2n^2} \sum_k \sum_{k'} \left(y_k - y_{k'}\right)^2 \right)^{1/2}$$

Valeurs minimale et maximale

- $CV_{min} = 0$: tous les revenus sont égaux.

- $CV_{max} = \sqrt{n-1}$: tous les revenus sont nuls sauf un (voir démonstration en annexe).

IV.5.2 Conséquence d'un transfert

$(CV)^2$ est de la forme $-\sum_k u(y_k)$, avec $u(y) = -\frac{1}{n}(y-1)^2$, $u'(y) = \frac{2}{n}(y-1)$

La variation de CV consécutive à un transfert infinitésimal h d'un riche j vers un pauvre i vaut :

$$d(CV) = CV \frac{h}{n}(y_i - y_j)$$

La condition de Pigou-Dalton-Lorenz est vérifiée.

Remarque : à différence de revenu $y_j - y_i$ constante, d(CV) est indépendante du niveau des revenus (u"(y) est constante).

V. Désagrégation des indices

On suppose la population ***P*** décomposée en M sous-populations, ou strates, $P_1 \ldots P_m \ldots P_M$.

On note, pour chaque strate $\boldsymbol{P_m}$:

- n_m l'effectif

- x_{mj} le revenu du j-ième individu de la strate $(j = 1 \ldots n_m)$

- $\overline{x}_m = \frac{1}{n_m} \sum_{j=1}^{n_m} x_{mj}$ le revenu moyen.

V.1 *Indice de Theil*

On peut décomposer l'indice de Theil de la façon suivante :

$$T = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{n_m} \frac{x_{mj}}{\overline{x}} Log\left(\frac{x_{mj}}{\overline{x}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{M} \frac{\overline{x}_m}{\overline{x}} \left[\sum_{j=1}^{n_m} \frac{x_{mj}}{\overline{x}_m} Log\left(\frac{x_{mj}}{\overline{x}_m}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n_m} \frac{x_{mj}}{\overline{x}_m} \right) Log\left(\frac{\overline{x}_m}{\overline{x}}\right) \right]$$

soit :

$$\boxed{T = \sum_{m=1}^{M} \frac{n_m \overline{x}_m}{n \overline{x}} T_m + \sum_{m=1}^{M} \frac{n_m \overline{x}_m}{n \overline{x}} Log\left(\frac{\overline{x}_m}{\overline{x}}\right)}$$

avec $T_m = \frac{1}{n_m} \sum_{j=1}^{n_m} \frac{x_{mj}}{\overline{x}_m} Log\left(\frac{x_{mj}}{\overline{x}_m}\right)$ = indice de Theil dans la strate $\boldsymbol{P_m}$.

$\frac{n_m \overline{x}_m}{n \overline{x}}$ représente la part des revenus des individus de la strate $\boldsymbol{P_m}$.

Le premier terme est la moyenne des indices de Theil calculés à l'intérieur de chaque strate, pondérés par les poids (en termes de revenus) des strates : on l'appelle **indice de Theil intra-strates.**

Le deuxième terme s'interprète comme l'indice de Theil de la distribution des revenus moyens des strates $\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m \ldots \overline{x}_M$, ces revenus étant affectés de poids n_m/n proportionnels aux effectifs des strates ($\overline{x}$ est la moyenne de cette distribution) : on l'appelle **indice de Theil inter-strates.**

On peut donc écrire :

$$\boxed{T = T_{\text{intra}} + T_{\text{inter}}}$$

Remarque : $T_{\text{inter}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\overline{x}_m}{\overline{x}} =$ constante $\Leftrightarrow$ les revenus moyens par strate sont égaux.

V.2 Ecart moyen de logarithmes

On peut décomposer l'écart moyen des logarithmes (défini au § IV.3.1) de la façon suivante :

$$I = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_m} Log\left(\frac{x_{mj}}{\overline{x}}\right) = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{M}\left[\sum_{j=1}^{n_m} Log\left(\frac{x_{mj}}{\overline{x}_m}\right) + n_m\, Log\left(\frac{\overline{x}_m}{\overline{x}}\right)\right]$$

soit :

$$\boxed{I = \sum_{m=1}^{M}\frac{n_m}{n} I_m + \sum_{m=1}^{M} -\frac{n_m}{n} Log\left(\frac{\overline{x}_m}{\overline{x}}\right)}$$

avec $I_m = -\frac{1}{n_m}\sum_{m=1}^{n_m} Log\left(\frac{x_{mj}}{\overline{x}_m}\right)$ = écart moyen des logarithmes dans la strate $\boldsymbol{P_m}$.

Le premier terme est la moyenne des écarts moyens des logarithmes calculés à l'intérieur de chaque strate, pondérés par les poids (en termes d'effectifs) des strates : on l'appelle **écart moyen des logarithmes intra-strates**.

Le deuxième terme s'interprète comme l'écart moyen des logarithmes de la distribution des revenus moyens des strates $\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m \ldots \overline{x}_M$, ces revenus étant affectés de poids n_m / n proportionnels aux effectifs des strates ($\overline{x}$ est la moyenne de cette distribution) : on l'appelle **écart moyen des logarithmes inter-strates**.

On peut donc écrire :

$$\boxed{I = I_{\text{intra}} + I_{\text{inter}}}$$

Démonstration IV.1.2 (b)

Population des riches $P_r = \{k,\, x_k \geq \overline{x}\} = \{k,\, y_k \geq 1\}$

Population des pauvres $P_p = \{k,\, x_k < \overline{x}\} = \{k,\, y_k < 1\}$

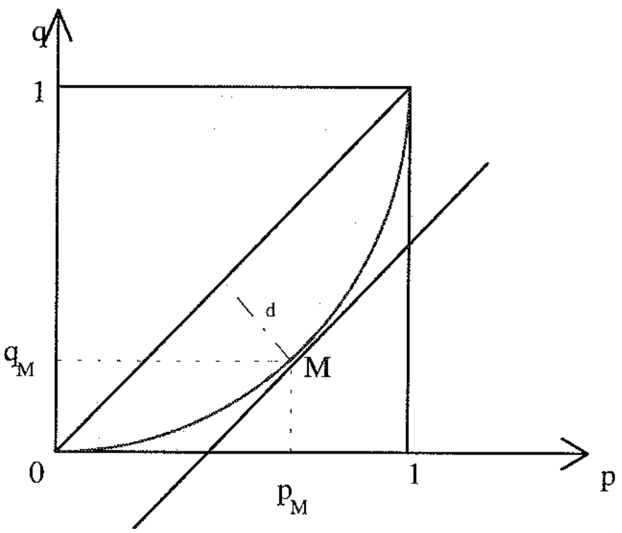
On note n_r *et* n_p les effectifs de P_r *et* P_p, $\overline{x}_r$ *et* $\overline{x}_p$ les revenus moyens, $\overline{y}_r$ *et* $\overline{y}_p$ les revenus relatifs moyens.

On a : $n = n_r + n_p \qquad \overline{x} = n_r\, \overline{x}_r + n_p\, \overline{x}_p \qquad n = n_r\, \overline{y}_r + n_p\, \overline{y}_p$

$$D = \frac{1}{n}\left[\sum_{k \in P_r}(y_k - 1) + \sum_{k \in P_p}(1 - y_k)\right] = \frac{1}{n}\left[\left(n_r\, \overline{y}_r - n_p\, \overline{y}_p\right) + n_p - n_r\right] = 2\left(\frac{n_r\, \overline{y}_r}{n} - \frac{n_r}{n}\right)$$

Démonstration IV.1.2 (c)

La démonstration est simple dans le cas d'une variable continue.



Soit M le point de la courbe de Lorenz où la tangente est parallèle à la bissectrice : c'est le point où la distance à cette bissectrice est maximale (en raison de la convexité de la courbe).

L'abscisse p_M de ce point est telle que $\frac{1}{m} F^{-1}(p_M) = 1$, i.e. $p_M = F(m) = \int_0^m f(u)\,du$

p_M est donc la proportion d'individus "pauvres" (de revenu inférieur à la moyenne).

L'ordonnée q_M de ce point est :

$$q_M = \frac{1}{m} \int_0^{p_M} F^{-1}(v)\,dv = \frac{1}{m} \int_0^m u\, f(u)\,du$$

q_M est la proportion de la masse totale des revenus détenue par les individus "pauvres".

On a alors :

$$\sqrt{2}\, d = p_M - q_M = \frac{1}{m} \int_0^m (m-u) f(u)\,du$$

$$\text{et } D = \frac{1}{m} \int_0^m (m-u) f(u)\,du + \frac{1}{m} \int_m^\infty (u-m) f(u)\,du = 2 \times \frac{1}{m} \int_0^m (m-u) f(u)\,du = 2\sqrt{2}\, d$$

Démonstration IV.2.2

La variance des logarithmes est de la forme $-\sum_k u(y_k)$, avec $u(y) = -\frac{1}{n}\left[Log\left(\frac{y}{g}\right)\right]^2$

$u'(y) \approx -\frac{2}{ny} Log\left(\frac{y}{g}\right)$, $u''(y) \approx -\frac{2}{ny^2}\left[1 - Log\left(\frac{y}{g}\right)\right]$ (en négligeant la variation de g, qui dépend également de y).

On a donc :

$u''(y) < 0 \text{ si } y/g < e$
$u''(y) > 0 \text{ si } y/g > e$

Démonstration IV.3.1

On a : $\frac{y_k}{n} \leq 1 \quad \forall k$, donc : $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k}{n}\right)^a \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{n} = 1$, avec égalité $\Leftrightarrow$ $y_k = 0 \; ou \; 1 \; \forall k$

$$Donc: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k}{n}\right)^a \geq n^{a-1}, \quad et \quad A(a) \leq 1 - n^{\frac{a-1}{a}}$$, avec égalité $\Leftrightarrow y_n = 1 \; et \; y_k = 0 \; si \; k \neq n$

Démonstration IV.3.2

$$Si\, a \neq 0,\, on\, a: (1-A)^a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k)^a, \quad d'où: \; -a(1-A)^{a-1}\, dA = \frac{1}{n}\left[-a\left(y_j\right)^{a-1} h + a\left(y_i\right)^{a-1} h\right]$$

$$soit\; dA(a) = \frac{(1-A)^{1-a} h}{n}\left(\left(y_j\right)^{a-1} - \left(y_i\right)^{a-1}\right)$$

$$Si\, a = 0,\, on\, a: \; -Log\left[1-A(0)\right] = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Log\, y_k, \; d'où: \left[1-A(0)\right]^{-1} dA(0) = -\frac{1}{n}\left(-\frac{h}{y_j} + \frac{h}{y_i}\right)$$

$$soit\; dA(0) = \frac{\left[1-A(0)\right]h}{n}\left(\frac{1}{y_j} - \frac{1}{y_i}\right)$$

Démonstration IV.4.1

Il faut minimiser H sous la contrainte $\sum_k p_k = 1$

Lagrangien L $= -\sum_k p_k \; Log \; p_k - \lambda\left(\sum_k p_k - 1\right)$

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = -Log\; p_k - 1 - \lambda = 0$$

$\Rightarrow Log\; p_k =$ constante $\Rightarrow p_k = \frac{1}{n} \forall k$

Démonstration IV.4.2

$$Si\; a \approx 1: \left(y_k\right)^a \approx y_k\left[1 + (a-1) Log\, y_k\right]$$

$$\frac{1}{n}\sum_k (y_k)^a \approx \frac{1}{n}\sum_k y_k + \frac{a-1}{n}\sum_k y_k \, Log\, y_k = 1 + (a-1)T$$

$$\Rightarrow (1-a)T = 1 - \frac{1}{n}\sum_k (y_k)^a = 1 - [1 - A(a)]^a$$

Démonstration IV.5.1

$(CV)^2 + 1 = \frac{1}{n}\sum_k (y_k)^2 = n\sum_k \left(\frac{y_k}{n}\right)^2 \leq n\sum_k \frac{y_k}{n} = n$, avec égalité $\Leftrightarrow y_k = 0 \; ou \; 1 \; \forall k$

D'où : $CV \leq \sqrt{n-1}$, avec égalité $\Leftrightarrow y_n = 1 \; et \; y_k = 0 \; si \; k < n$