APPROCHE PAR MODÈLE DE NON-RÉPONSE POUR L'INFÉRENCE EN PRÉSENCE DE DONNÉES IMPUTÉES

DAVID HAZIZA & J.N.K. RAO

Statistique Canada & Université Carleton

Paris

15 Mars 2004

Plan de la présentation

- Introduction
- Imputation par la régression
- Estimateur imputé
- Approches pour l'inférence
- Imputation par la régression modifiée
- Conclusions

Contexte

- Population finie de taille N
- L'objectif est d'estimer le total dans la population

$$Y = \sum_{i \in U} y_i ,$$

  pour une variable d'intérêt y.
- On tire un échantillon aléatoire, s, de taille n, selon un plan de sondage $p(.)$.

Estimation: réponse complète

- Un estimateur de Y est l'estimateur de Horvitz-Thompson

$$\hat{Y} = \sum_{i \in s} w_i y_i ,$$

- $w_i = 1/\pi_i$ désigne le poids de sondage de l'unité i
- π_i désigne la probabilité d'inclusion de l'unité i dans l'échantillon s; $i = 1,..., N$.

Non-réponse: estimateur imputé

- En présence de non-réponse à la variable y, on définit un estimateur imputé de Y selon

$$\hat{Y}_I = \sum_{i \in s} w_i a_i y_i + \sum_{i \in s} w_i (1 - a_i) y_i^*,$$

où a_i est une variable indicatrice de réponse telle que

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'unité } i \text{ a répondu à la variable } y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et y_i^* désigne la valeur imputée utilisée pour remplacer la valeur manquante y_i

Imputation par la régression déterministe

- Soit $\mathbf{z_i} = (z_{1i},...,z_{qi})'$ un vecteur de variables auxiliaires disponibles pour toutes les unités échantillonnées
- Les valeurs imputées peuvent être obtenues en ajustant le modèle de régression

$$m: y_i = \mathbf{z_i'}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i,$$
$$E_m(\varepsilon_i) = 0,\ E_m(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0,\ i \neq j,\ V_m(\varepsilon_i) = \sigma^2\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{z_i} \equiv \sigma^2 c_i^{-1}$$

au moyen des unités répondantes.

Valeurs imputées: $y_i^* = \mathbf{z_i'}\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$,

$$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r} = \left(\sum_{i\in s} w_i a_i c_i \mathbf{z_i}\mathbf{z_i'}\right)^{-1} \sum_{i\in s} w_i a_i c_i \mathbf{z_i} y_i$$

Estimateur imputé

- L'estimateur imputé devient:

$$\hat{Y}_I = \hat{Y}_r + \left(\hat{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}}_\mathbf{r}\right)' \hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$$

$$\hat{Y}_r = \sum_{i \in s} w_i a_i y_i \qquad \hat{\mathbf{Z}} = \sum_{i \in s} w_i \mathbf{z_i} \qquad \hat{\mathbf{Z}}_\mathbf{r} = \sum_{i \in s} w_i a_i \mathbf{z_i}$$

- Similaire à un estimateur GREG dans le cas de l'échantillonnage à deux phases

Mécanisme de non-réponse

- Le comportement de réponse/non-réponse est vu comme un phénomène aléatoire
- La distribution des variables indicatrices de réponse, $P(a_i \mid s)$, est appelée mécanisme de non-réponse

$$a_i \overset{ind.}{\sim} B(1, p_i)$$

où $p_i = P(a_i = 1 \mid s; i \in s)$ désigne la probabilité de réponse pour l'unité i

Mécanisme de non-réponse

On distingue 3 types de mécanisme de non-réponse:

1. Mécanisme uniforme :

$$p_i = p$$

2. Mécanisme non-confondu : la probabilité de réponse peut dépendre d'un vecteur de variables auxiliaires $\mathbf{x}$ mais pas de la variable d'intérêt y

$$p_i = P(a_i = 1 \mid y, \mathbf{x}) = P(a_i = 1 \mid \mathbf{x})$$

3. Mécanisme confondu :

$$p_i = P(a_i = 1 \mid y, \mathbf{x})$$

Approches pour l'inférence

- Traditionnellement, deux approches ont été utilisées dans la littérature pour l'inférence en présence de données imputées:

1. Approche par Modèle de Non-Réponse Uniforme (AMNRU) (Rao, 1990)

   Le mécanisme de non-réponse est uniforme, $p_i = p$

2. Approche par Modèle d'Imputation (AMI) (Särndal, 1992)

   Le mécanisme de non-réponse est non-confondu et on fait appel à un modèle d'imputation

$$m: y_i = \mathbf{z_i'\beta} + \varepsilon_i,$$
$$E_m(\varepsilon_i) = 0,\ E_m(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0,\ i \neq j,\ V_m(\varepsilon_i) = \sigma^2 \boldsymbol{\lambda}' \mathbf{z_i} \equiv \sigma^2 c_i$$

Une troisième approche

Approche par Modèle de Non-Réponse Généralisé (AMNRG)

Le mécanisme de non-réponse est non-confondu et on fait appel à un modèle de non-réponse

$$\log \frac{p_i}{1-p_i} = \mathbf{x}_\mathbf{i}'\boldsymbol{\gamma}$$

où $\mathbf{x_i}$ est un vecteur de variables auxiliaires disponibles pour toutes les unités échantillonnées.

Remarque: L'AMNRU est un cas particulier de l'AMNRG

Quelle approche utiliser?

Modéliser la variables d'intérêt?

ou

modéliser la probabilité de réponse?

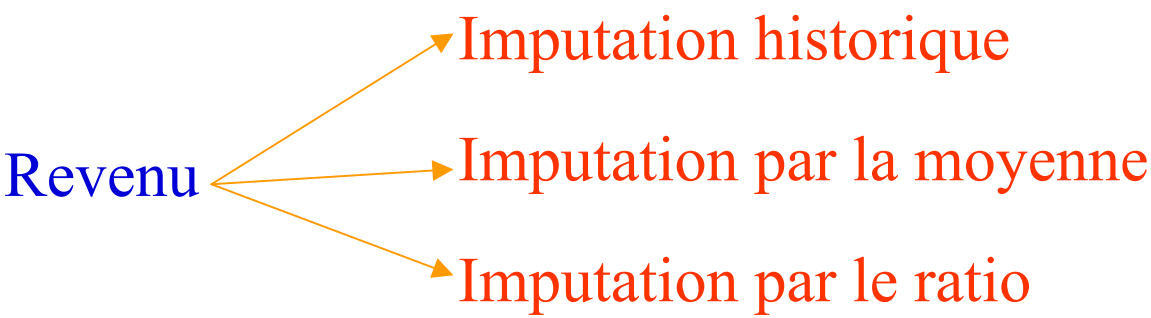
ou

modéliser les deux?

Exemples

(1) Projet de la TPS

Plusieurs méthodes d'imputation pour une même variable



(2) Enquête sur les dépenses et immobilisations

Montant dépensé pour l'équipement par les compagnies :

Beaucoup de 0!

Décomposition de l'erreur totale

- L'erreur totale, $\hat{Y}_I - Y$, peut être décomposée comme suit:

$$\underbrace{\hat{Y}_I - Y}_{\text{erreur totale}} = \underbrace{\left(\hat{Y} - Y\right)}_{\substack{\text{erreur due à} \\ \text{l'échantillonnage}}} + \underbrace{\left(\hat{Y}_I - \hat{Y}\right)}_{\substack{\text{erreur due à} \\ \text{la non-réponse}}}$$

- Nous évaluons les propriétés, étant donné l'échantillon *s*
- Cela permet de mettre l'accent sur l'erreur de non-réponse

→ $\hat{Y} - Y$ est non aléatoire

Biais de non-réponse sous l'AMNRU

$$\text{Biais}\left(\hat{Y}_I \,|\, s\right) = E_r\left(\hat{Y}_I - \hat{Y} \,|\, s\right) \approx 0$$

- Sous l'AMNRU, $E_r\left(a_i \,|\, s\right) = p$

Biais de non-réponse sous l'AMI

$$\text{Biais}\left(\hat{Y}_I \mid s\right) = E_r E_m\left(\hat{Y}_I - \hat{Y} \mid s\right) \approx 0$$

- Sous l'AMI, $E_m\left(y_i \mid s\right) = \mathbf{z}_i'\boldsymbol{\beta}$

Biais de non-réponse sous l'AMNRG

$$\text{Biais}\left(\hat{Y}_I \middle| s\right) = E_r\left(\hat{Y}_I - \hat{Y} \mid s\right) = -\sum_{i \in s} w_i (1 - p_i)\left(y_i - \mathbf{z_i'}\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{p}\right) \neq 0$$

- Sous l'AMNRG, $\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{p} = E_r\left(\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r} \mid s\right)$

$$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r} = \left(\sum_{i \in s} w_i a_i p_i c_i \mathbf{z_i} \mathbf{z_i'}\right)^{-1} \sum_{i \in s} w_i p_i c_i \mathbf{z_i} y_i$$

$$\hat{\text{B}}\left(\hat{Y}_I \middle| s\right) = -\sum_{i \in s} w_i a_i \frac{(1 - p_i)}{p_i}\left(y_i - \mathbf{z_i'}\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}\right)$$

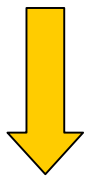
Comparaisons

	Approche par modèle de non-réponse uniforme	Approche par modèle d'imputation	Approche par modèle de non-réponse généralisé
$\hat{Y}_I$ avec $y_i^* = \mathbf{z_i'}\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$	Sans biais	Sans biais	Biaisé

Estimateur ajusté

- On définit un estimateur ajusté par

$$\hat{Y}_I^a = \hat{Y}_I - \hat{\mathrm{B}}\left(\hat{Y}_I | s\right)$$



$$\hat{Y}_I^a = \sum_{i \in s} w_i \mathbf{z_i'} \hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r} + \sum_{i \in s} w_i \frac{a_i}{p_i} \left(y_i - \mathbf{z_i'} \hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}\right)$$

- Similaire à un estimateur par la régression
- En pratique, les p_i ne sont pas connues utiliser $\hat{p}_i$

Caractéristiques

- Si $\hat{p}_i \approx p_i$, l'estimateur ajusté est approximativement sans biais sous l'AMNRG
- Si le modèle d'imputation est correctement spécifié, l'estimateur ajusté est approximativement sans biais sous l'AMI

Valide sous les deux approches

Désavantage: requiert les variables indicatrices de réponse a_i ainsi que les probabilités de réponse $\hat{p}_i$ dans le fichier

Comparaisons

	Approche par modèle de non-réponse uniforme	Approche par modèle d'imputation	Approche par modèle de non-réponse généralisé
$\hat{Y}_I$ avec $y_i^* = \mathbf{z_i'}\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$	Sans biais	Sans biais	Biaisé
$\hat{Y}_I^a$ avec $y_i^* = \mathbf{z_i'}\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$	Sans biais	Sans biais	Sans biais

Imputation par la régression modifiée

- Le but est de déterminer des valeurs imputées telles que l'estimateur imputé, $\hat{Y}_I$, soit sans biais pour Y
- Nous cherchons des valeurs imputées de la forme, $y_i^* = \mathbf{z}_i'\boldsymbol{\beta}$, où $\boldsymbol{\beta}$ est supposé connu pour l'instant

$$\Rightarrow \quad \hat{Y}_I = \sum_{i \in s} w_i a_i y_i + \sum_{i \in s} w_i (1 - a_i) \mathbf{z}_i'\boldsymbol{\beta},$$

- On détermine $\boldsymbol{\beta}$ tel que

$$\text{Biais}\left(\hat{Y}_I \mid s\right) = E_r\left(\hat{Y}_I - \hat{Y} \mid s\right) = 0$$

Imputation par la régression modifiée

$$\text{Biais}\left(\hat{Y}_I \mid s\right) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{B}} = \left(\sum_{i \in s} w_i (1 - p_i) c_i \mathbf{z_i} \mathbf{z}_i' \right)^{-1} \sum_{i \in s} w_i (1 - p_i) c_i \mathbf{z_i} y_i$$

$\tilde{\mathbf{B}}$ ne peut être calculé puisque certaines valeurs de y dans s sont manquantes et que les probabilités de réponse p_i ne sont pas connues

$$\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{r} = \left(\sum_{i \in s} w_i \frac{(1 - \hat{p}_i)}{\hat{p}_i} a_i c_i \mathbf{z_i} \mathbf{z}_i' \right)^{-1} \sum_{i \in s} w_i \frac{(1 - \hat{p}_i)}{\hat{p}_i} a_i c_i \mathbf{z_i} y_i$$

$$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r} = \left(\sum_{i \in s} w_i a_i c_i \mathbf{z_i} \mathbf{z}_i' \right)^{-1} \sum_{i \in s} w_i a_i c_i \mathbf{z_i} y_i$$

Imputation par la régression modifiée

- Sous l'AMNRG, les valeurs imputées adéquates sont données par

$$y_i^* = \mathbf{z}_\mathbf{i}' \tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$$

- Si $\hat{p}_i \approx p_i$ l'estimateur ajusté est approximativement sans biais sous l'AMNRG

- Si le modèle d'imputation est correctement spécifié, l'estimateur ajusté est approximativement sans biais sous l'AMI

Valide sous les deux approches

Caractéristiques

- Si $\hat{p}_i \approx \hat{p}$, on a $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{r} = \hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$
- Ne requiert les variables indicatrices de réponse a_i ou les probabilités de réponse $\hat{p}_i$ dans le fichier
- Le poids $w_i \times \dfrac{(1-\hat{p}_i)}{\hat{p}_i}$ est obtenu en haussant le poids de sondage w_i pour les unités qui ont une faible probabilité de réponse et vice versa
- Généralisation de Brewer (JASA, 1979)
- Les valeurs imputées par la régression modifiée peuvent être obtenues par la technique de l'imputation par calage (Beaumont, 2005)

Comparaisons

	Approche par modèle de non-réponse uniforme	Approche par modèle d'imputation	Approche par modèle de non-réponse généralisé
$\hat{Y}_I$ avec $y_i^* = \mathbf{z_i'}\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$	Sans biais	Sans biais	Biaisé
$\hat{Y}_I^a$ avec $y_i^* = \mathbf{z_i'}\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$	Sans biais	Sans biais	Sans biais
$\hat{Y}_I$ avec $y_i^* = \mathbf{z_i'}\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{r}$	Sans biais	Sans biais	Sans biais

Choix optimal de β

- Au lieu de chercher la valeur de β qui garantit un estimateur approximativement sans biais, on peut chercher la valeur de β qui minimise l'EQM conditionnelle, donnée par

$$EQM\left(\hat{Y}_I \mid s\right) = V_r\left(\hat{Y}_I \mid s\right) + \text{Biais}\left(\hat{Y}_I \mid s\right)^2$$

- Le choix optimal, $\tilde{\mathbf{B}}_{opt}$, est relativement complexe mais sous certaines conditions, on peut montrer que

$$\tilde{\mathbf{B}}_{opt} = \tilde{\mathbf{B}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

→ Le choix $\tilde{\mathbf{B}}$ est presque optimal pour de grandes tailles d'échantillon

Modéliser les deux?

- L'imputation par la régression modifiée mène à un estimateur imputé approximativement sans biais si l'un des deux modèles est mal spécifié
- Si le mécanisme de non-réponse est confondu, alors l'imputation par la régression modifiée mènera généralement à des estimateurs ayant un plus petit biais que ceux obtenus par l'imputation par la régression traditionnelle

$$y_i^* = \mathbf{z}_\mathbf{i}' \tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{r},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{r} = \left(\sum_{i \in s} w_i \frac{(1-\hat{p}_i)}{\hat{p}_i} a_i c_i \mathbf{z}_\mathbf{i} \mathbf{z}_\mathbf{i}' \right)^{-1} \sum_{i \in s} w_i \frac{(1-\hat{p}_i)}{\hat{p}_i} a_i c_i \mathbf{z}_\mathbf{i} y_i$$

Imputation par la régression aléatoire

Imputation par la régression aléatoire

=

Imputation par la régression déterministe + résidu aléatoire ajouté

- Imputation par la régression aléatoire traditionnelle: Résidu pour l'unité *i* est tiré avec remise avec probabilité $w_i \Big/ \sum_{j \in s} w_j a_j$

- Imputation par la régression aléatoire modifiée: Résidu pour l'unité *i* est tiré avec remise avec probabilité $\tilde{w}_i \Big/ \sum_{j \in s} \tilde{w}_j a_j$

$$\tilde{w}_i = w_i \left(\frac{1 - \hat{p}_i}{\hat{p}_i} \right)$$

Conclusions

- L'imputation modifiée mène à des estimateurs valides sous les deux approches
- Le cas des domaines a été étudiée : Estimateur ajusté quand les domaines ne sont pas connus à l'étape de l'imputation
- Estimation de la variance a été étudiée : Approche renversée de Fay (1991) et la méthode de Binder (1983) pour la linéarisation en série de Taylor.