Procédures d'imputation jointes pour des variables catégorielles
Une application à l'enquête Patrimoine 2010

Hélène Chaput, Laurianne Salembier, Julie Solard (Insee)
Guillaume Chauvet (Crest, Ensai)
David Haziza (Univ. de Montréal)

Journées de Méthodologie Statistique
Paris, 25/01/2012

Plan de l'exposé

Introduction : le cas univarié

Notation

On considère une population finie d'individus

$$U = \{1, \ldots, k, \ldots, N\},$$

où chaque individu est supposé identifiable par son label k. On note x_k la valeur prise par une variable d'intérêt x sur un individu k de U.

Un échantillon S est sélectionné dans U au moyen d'un plan de sondage $p(\cdot)$. Les probabilités d'inclusion $\pi_k = \mathbb{P}(k \in S)$ sont supposées connues et non nulles. Soit w_k le poids de sondage de l'unité k.

Du point de vue de l'échantillonnage, les variables d'intérêt sont fixées et non aléatoires. L'alea provient de la sélection de S.

Estimation d'un total

Nous nous intéressons d'abord au cas d'une variable x binaire $0-1$. Les résultats présentés s'étendent simplement au cas d'une variable catégorielle avec un nombre quelconque de modalités.

En situation de réponse complète à la variable x, le total t_x peut être estimé sans biais sous le plan de sondage par

$$\hat{t}_{x\pi} = \sum_{k \in S} w_k x_k.$$

En situation de non-réponse pour la variable x, une valeur manquante x_k est remplacée par une valeur imputée x_k^* (Haziza, 2009). On obtient l'estimateur

$$\hat{t}_{xI} = \sum_{k \in S_r} w_k x_k + \sum_{k \in S_m} w_k x_k^*.$$

Imputation hot-deck (RHDI)

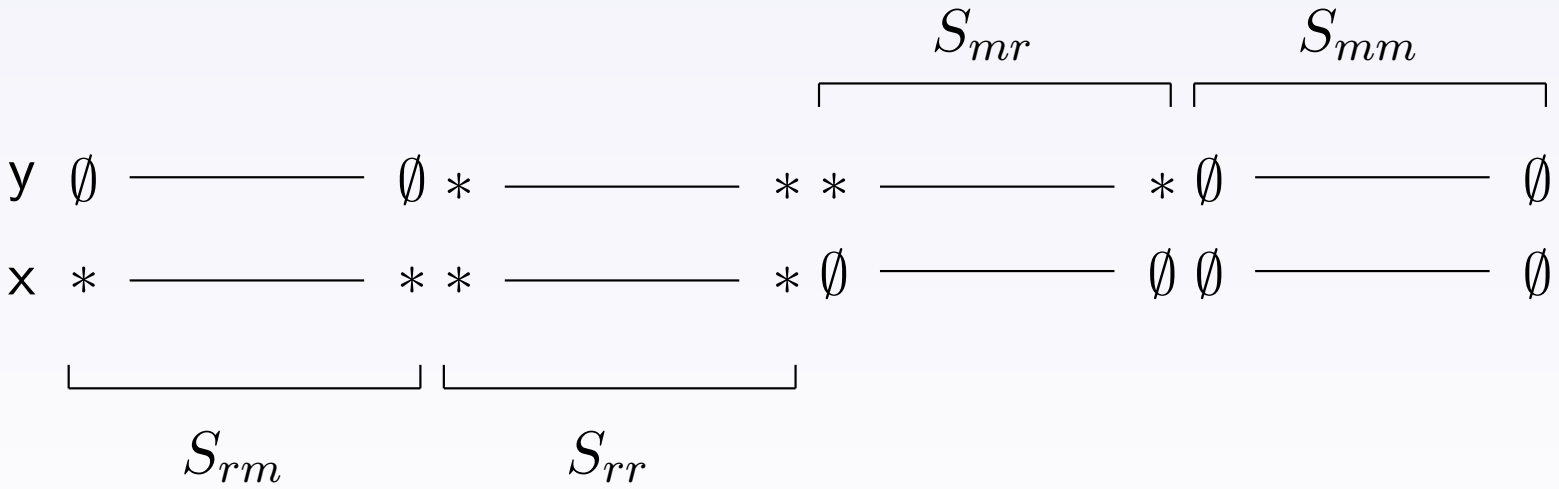
La méthode du hot-deck est couramment utilisée en pratique pour imputer une variable catégorielle. Une valeur manquante x_k est remplacée par $x_{(i)}$, sélectionnée au hasard et avec remise parmi les valeurs observées $x_i,\ i \in S_r$.

On note $q(\cdot)$ le mécanisme de réponse. L'estimateur imputé $\hat{t}_{xI}$ est approximativement $pq-$non biaisé si la variable x_k et la probabilité p_k de répondre à cette variable sont non corrélées.

En pratique, l'imputation se fait souvent au sein de classes définies à l'aide de variables explicatives de x_k et/ou de p_k, afin que cette condition soit approximativement vérifiée.

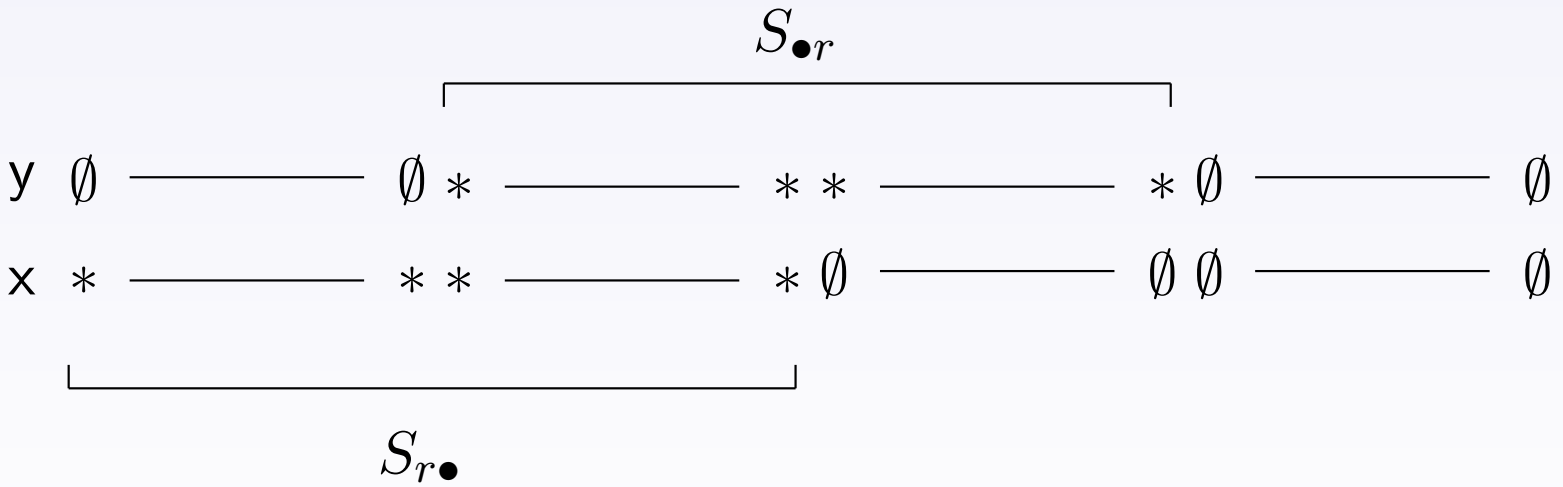
Cas de deux variables

Considérons maintenant le cas de deux variables x_k et y_k affectées par de la non-réponse partielle. La structure obtenue pour les données manquantes est plus complexe.



Cas de deux variables

Considérons maintenant le cas de deux variables x_k et y_k affectées par de la non-réponse partielle. La structure obtenue pour les données manquantes est plus complexe.



Hypothèses sur le mécanisme de réponse

Nous faisons les hypothèses suivantes sur le mécanisme de réponse :

1. les unités répondent indépendamment les unes des autres,
2. le mécanisme de réponse aux items est uniforme, au sens où :

$$\begin{aligned} P(r_{xi}=1, r_{yi}=1) &\equiv p_{rr}, \\ P(r_{xi}=1, r_{yi}=0) &\equiv p_{rm}, \\ P(r_{xi}=0, r_{yi}=1) &\equiv p_{mr}, \\ P(r_{xi}=0, r_{yi}=0) &\equiv p_{mm}. \end{aligned}$$

Là encore, il est possible de définir des classes d'imputation pour que la condition 2 soit approximativement vérifiée.

Cas de deux variables : imputation marginale (RMI)

Supposons que **les deux variables soient imputées indépendamment**.

Pour :

$$\begin{array}{lll} k \notin S_{r\bullet} & x_k^* = x_{(i)} & \text{tiré parmi } x_i,\ i \in S_{r\bullet}, \\ l \notin S_{\bullet r} & y_l^* = y_{(j)} & \text{tiré parmi } y_j,\ j \in S_{\bullet r}. \end{array}$$

Simulation illustrative : pop artificielle de $N = 10,000$ individus, coef. de corrélation $\rho = 0.5$. On simule $B = 1,000$ fois un SAS(500) + proba de réponse de 0.55 pour chaque variable.

$\hat{\rho}_I$	RMI
Biais Rel. en %	-59.9
(Coef Var. en %)	(8.7)

Imputer les deux variables séparément conduit à atténuer fortement les relations entre ces variables.

Méthodes d'imputation jointes

Procédure d'imputation hot-deck (RHDI)

On utilise un donneur commun si les deux variables sont manquantes.

Pour :

$$
\begin{array}{lll}
k \in S_{mr} & x_k^* = x_{(i)} & \text{tiré parmi } x_i,\ i \in S_{r\bullet}, \\
k \in S_{rm} & y_k^* = y_{(j)} & \text{tiré parmi } y_j,\ j \in S_{\bullet r}, \\
k \in S_{mm} & (x_k^*, y_k^*) = (x_{(i)}, y_{(i)}) & \text{tiré parmi } (x_i, y_i),\ i \in S_{rr}.
\end{array}
$$

$\hat{\rho}_I$	RMI	RHDI
Biais Rel. en %	-59.9	-30.3
(Coef Var. en %)	(8.7)	(10.7)

Le biais diminue, mais reste très important.

Procédure d'imputation jointe (JHDI)

L'idée consiste à **tirer un donneur dans la distribution conditionnelle de la variable imputée**.

$$
\begin{array}{lll}
k \in S_{mr} & x_k^* = x_{(i)} \text{ tiré parmi} & x_i | y_i = y_k, \quad i \in S_{rr}, \\
k \in S_{rm} & y_k^* = y_{(j)} \text{ tiré parmi} & y_j | x_j = x_k, \quad j \in S_{rr}, \\
k \in S_{mm} & (x_k^*, y_k^*) = (x_{(i)}, y_{(i)}) & \text{tiré parmi } (x_i, y_i),\ i \in S_{rr}.
\end{array}
$$

$\hat{\rho}_I$	RMI	RHDI	JHDI
Biais Rel. en %	-59.9	-30.3	-0.2
(Coef Var. en %)	(8.7)	(10.7)	(13.5)

La corrélation entre les variables x et y est préservée, au prix d'une augmentation de la variabilité.

Procédure d'imputation jointe équilibrée (BHDI)

On peut **limiter la variance d'imputation de la procédure précédente en introduisant des contraintes d'équilibrage dans la sélection des donneurs**.

Exemple :

- SAS + 10 individus $k \in S_{mr}$ tels que $y_k = 1$;
- on observe 80 % de $x_l = 1$ parmi les $l \in S_{rr}$ tels que $y_l = 1$;
- on impute exactement 8 valeurs $x_k^* = 1$ tels que $y_k = 1$.

$\hat{\rho}_I$	RMI	RHDI	JHDI	BHDI
Biais Rel. en %	-59.9	-30.3	-0.2	-0.1
(Coef Var. en %)	(8.7)	(10.7)	(13.5)	(12.0)

La corrélation entre les variables x et y reste préservée, et la variabilité diminue.

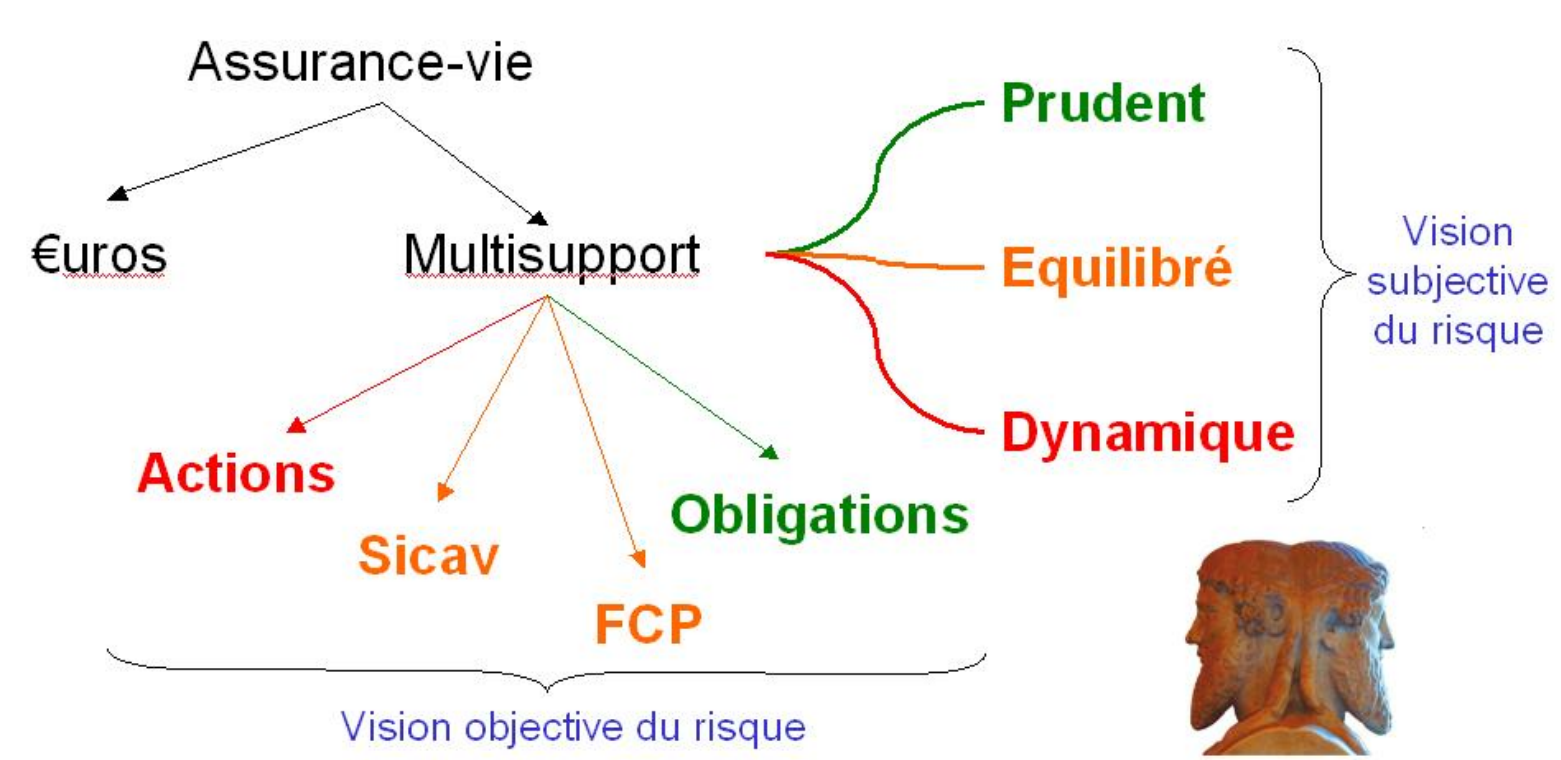
Application à l'Enquête Patrimoine 2010

L'enquête Patrimoine 2010

- Enquête réalisée tous les 6 ans depuis 1986
- Enquête auprès des ménages sur leur patrimoine et les facteurs pouvant l'expliquer
- Plan de sondage complexe, car patrimoine très concentré
- Non réponse : un enjeu crucial.

L'assurance vie

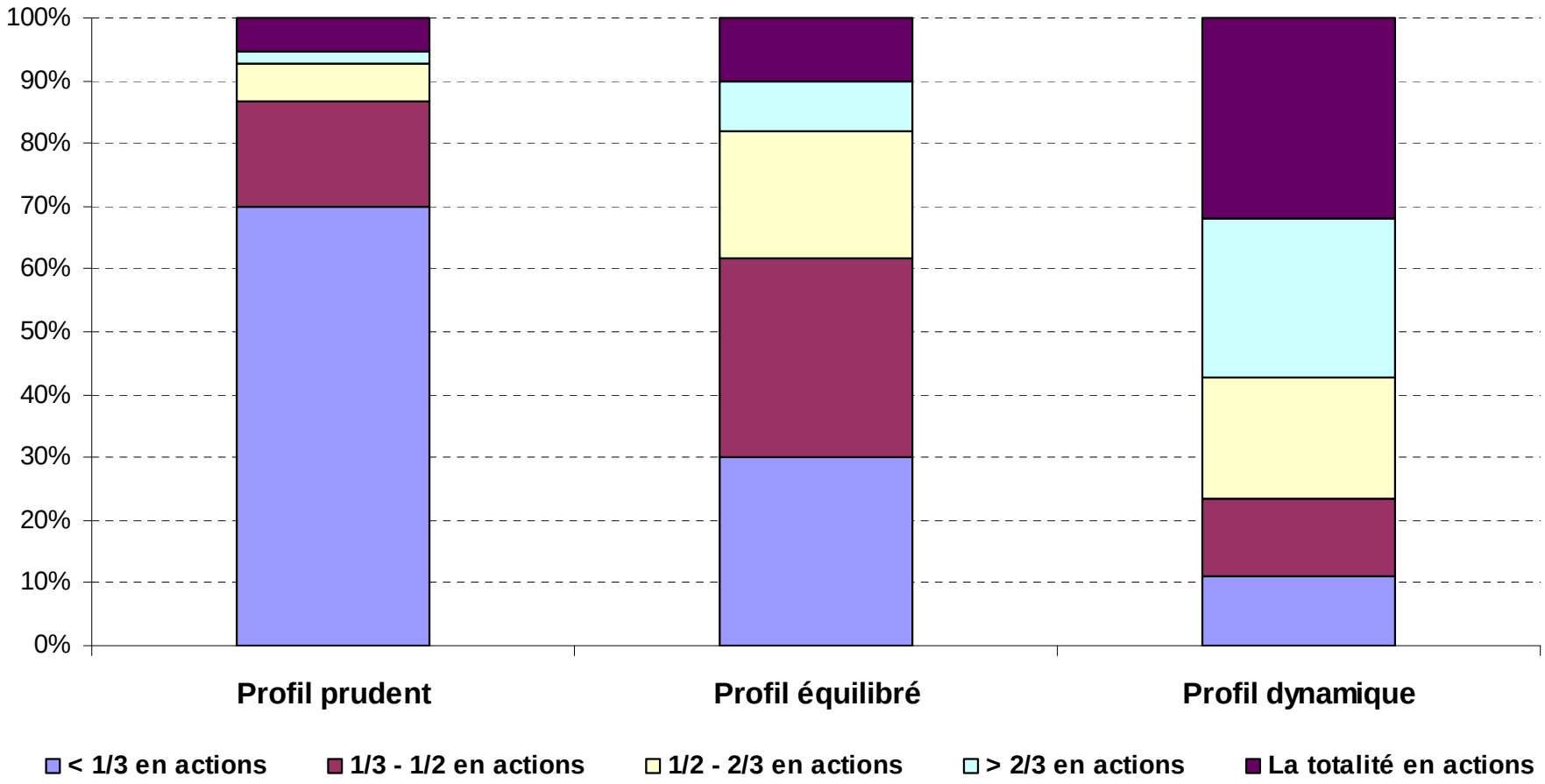
34 % des ménages détiennent au moins une assurance-vie.



Variables imputées

- Profil de l'assurance-vie :
  - prudent,
  - équilibré,
  - dynamique.
- Part de l'encours investi en actions :
  - moins d'un tiers,
  - entre un tiers et la moitié,
  - entre la moitié et les deux tiers,
  - plus des deux tiers,
  - la totalité.

Description des données



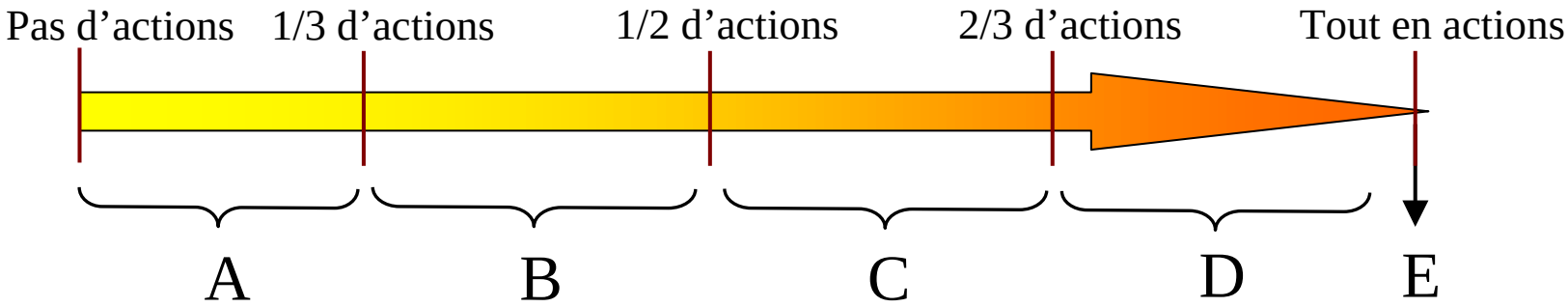
Description des données

Part en actions	Profil de l'assurance-vie			
	??	Profil prudent	Profil équilibré	Profil dynamique
??	510	492	234	58
< 1/3 en actions	45	1308	316	59
1/3 - 1/2 en actions	17	312	331	65
1/2 - 2/3 en actions	12	114	213	101
> 2/3 en actions	12	33	83	133
La totalité en actions	7	103	105	169

- Table: Répartition des assurances-vie selon leur profil et selon leur composition, et coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre le profil et la part en actions

	Pourcentage d'assurances-vie avec une part en actions					Pourcentage d'assurances-vie			Coefficient de corrélation
	A	B	C	D	E	sans risque	risque moyen	risque fort	
Cas complets	52.2	19.9	12.0	6.0	10.0	58.7	26.3	15.0	0.518
RHDI	51.4	20.5	11.9	6.2	10.0	60.0	26.4	13.6	0.434
JHDI	52.1	20.5	12.0	5.7	9.8	60.0	26.1	13.9	0.515
BHDI	53.2	19.5	11.7	6.1	9.6	66.6	25.6	13.8	0.508

- RHDI = IMPUTATION HOT-DECK
- JHDI = IMPUTATION JOINTE
- BHDI = IMPUTATION JOINTE EQUILIBREE



Bibliographie

Chaput, H., Chauvet, G., Haziza, D., Salembier, L., Solard, J. (2010). *Joint imputation procedures for categorical variables with application to the French Wealth Survey*, soumis.

Chauvet, G., Deville, J.-C., and Haziza, D. (2010). *On balanced random imputation in surveys*, Biometrika, vol 98, 459-471.

Haziza, D. (2009). *Imputation and inference in the presence of missing data*, Handbook of Statistics, vol.29, chap. 10.

Skinner, C.J., Rao, J.N.K. (2002). *Jackknife variance for multivariate statistics under hot deck imputation from common donors*, JSPI, 102, 149-167.