Quelques éléments de géométrie et d'algèbre pour comprendre la nature d'un échantillonnage équilibré

Jean-Claude Deville

Laboratoire de Statistique d'enquête

deville@ensai.fr

Un échantillonnage équilibré est exact si tous les sommets du polytope $K=(\pi+kerA)\cap C$ sont aussi des sommets de C (π est un vecteur de probabilités d'inclusion intérieur à C le N-cube et A la pxN matrice des contraintes dont les colonnes sont $a_k = x_k/\pi_k$). L'algorithme du cube n'a jamais besoin de phase d'atterrissage.

Les contraintes que doivent vérifier l'échantillon s'écrivent donc $As=X=A\pi$. Un problème d'échantillonnage équilibré a donc pour paramètres un vecteur π situé <u>dans l'intérieur de C</u> et la matrice A .

$K = C \cap (\pi + \ker(A))$ (ensemble des probabilités d'inclusion admissibles) est un polytope convexe de dimension $M=N-p$ puisque π est à l'intérieur de C. L'exactitude du problème se traduit par le fait que les sommets de K sont aussi des sommets de C (les échantillons équilibrés).Par suite tous les s-s' joignant deux sommets de K , en particulier les arêtes, sont

des éléments de $\mathbf{Z}^N$ (dont les coordonnées valent $0,+1$ ou -1) ; ces vecteurs engendrent un

sous groupe G_K de $\mathbf{Z}^N$ contenu dans $ker(A)$ et qui est donc aussi un sous-groupe de G_A , ensemble des points de coordonnées entières de $ker(A)$.

S'il existe au moins un échantillon vérifiant les contraintes on a le résultat suivant :

<u>Théorème</u> Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Le problème (A,π) est exact.

(ii) Toutes les pxp sous-matrices carrées de A de plein rang ont le même déterminant en valeur absolue.

(iii) $G_A=G_K$.

(iv) Il existe une pxp matrice inversible W telle que $WA = (I_p \quad B)$ où I_p est la matrice identité d'ordre p et B *une* $p\,x(N-p)$ matrice totalement unimodulaire.

Rappelons qu'une matrice est totalement unimodulaire si toutes ses sous-matrices carrées ont un déterminant qui vaut +1,0 ou -1.

La communication donne, en première mondiale, les démonstrations de ces résultats assorties de quelques commentaires.